PART3　三角関数の合成

例題

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $-\sin\theta+\cos\theta$　　(3) $3\sin\theta+4\cos\theta$

Point Pickup

練習

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$　(2) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$　(3) $5\sin\theta+12\cos\theta$

第10講　PART3 確認問題

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。

ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

1 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\boxed{ア}\sin\left(\boxed{イ}\right)$

[$\boxed{イ}$ の選択肢]

① $\theta+\dfrac{\pi}{6}$　② $\theta-\dfrac{\pi}{6}$　③ $\theta+\dfrac{\pi}{3}$　④ $\theta-\dfrac{\pi}{3}$

2 $\sqrt{3}\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{\boxed{ウ}}\sin\left(\boxed{エ}\right)$

[$\boxed{エ}$ の選択肢]

① $\theta-\dfrac{\pi}{3}$　② $\theta-\dfrac{\pi}{4}$

③ $\theta+\dfrac{2}{3}\pi$　④ $\theta+\dfrac{3}{4}\pi$

3 $2\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\boxed{オ}}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{\boxed{カ}}{\sqrt{\boxed{キ}}}$，$\cos\alpha=\dfrac{\boxed{ク}}{\sqrt{\boxed{キ}}}$

PART3　三角関数の合成

例題

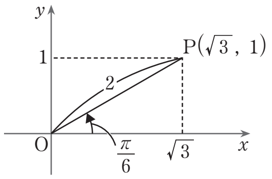
次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $-\sin\theta+\cos\theta$　　(3) $3\sin\theta+4\cos\theta$

(1) 点 $P(\sqrt{3},\ 1)$ をとると　$OP=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると　$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$

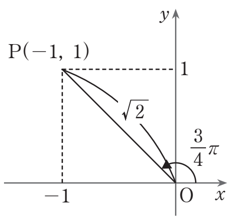
よって　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$



(2) 点 $P(-1,\ 1)$ をとると　$OP=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると　$\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

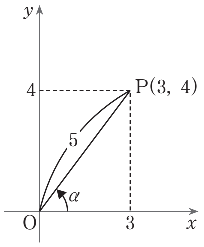


(3) 点 $P(3,\ 4)$ をとると　$OP=\sqrt{3^2+4^2}=5$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$3\sin\theta+4\cos\theta=5\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$



練習

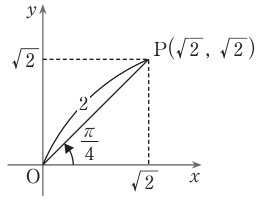
次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$　　(3)　$5\sin\theta+12\cos\theta$

(1)　点 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ をとると　$\mathrm{OP}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると　$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

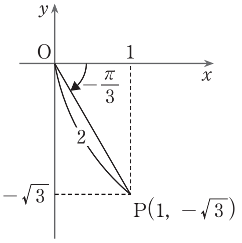
よって　$\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$



(2)　点 $\mathrm{P}(1,\ -\sqrt{3})$ をとると　$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると　$\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

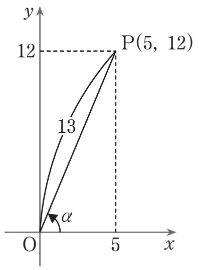


(3)　点 $\mathrm{P}(5,\ 12)$ をとると　$\mathrm{OP}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$5\sin\theta+12\cos\theta=13\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$



第10講　PART3 確認問題 解答

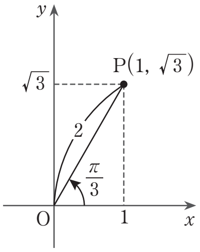
1

[正解] ア：2，イ：③

[解説]

座標平面上に点 $\mathrm{P}(1,\ \sqrt{3})$

をとると



$$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{4}=2$$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$\alpha=\frac{\pi}{3}$$

よって

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\mathbf{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$$ [A]

[A]　三角関数の合成

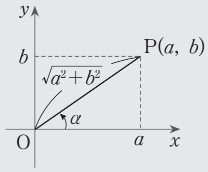
$a\sin\theta+b\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



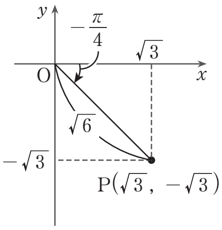
2

[正解] ウ：6，エ：②

[解説]

座標平面上に点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

をとると



$$\mathrm{OP}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{6}$$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$\alpha=-\frac{\pi}{4}$$

よって

$$\sqrt{3}\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\mathbf{\sqrt{6}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$$ [B]

[B]　三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

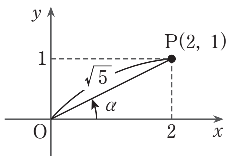
3 **[正解]** オ：5，カ：1，キ：5，ク：2

[解説]

座標平面上に点 P(2，1)

をとると

$$\mathrm{OP}=\sqrt{2^2+1^2}$$
$$=\sqrt{5}$$



線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$$2\sin\theta+\cos\theta=\boldsymbol{\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)}$$ [C]

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$，$\cos\alpha=\dfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$

[C]　三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$